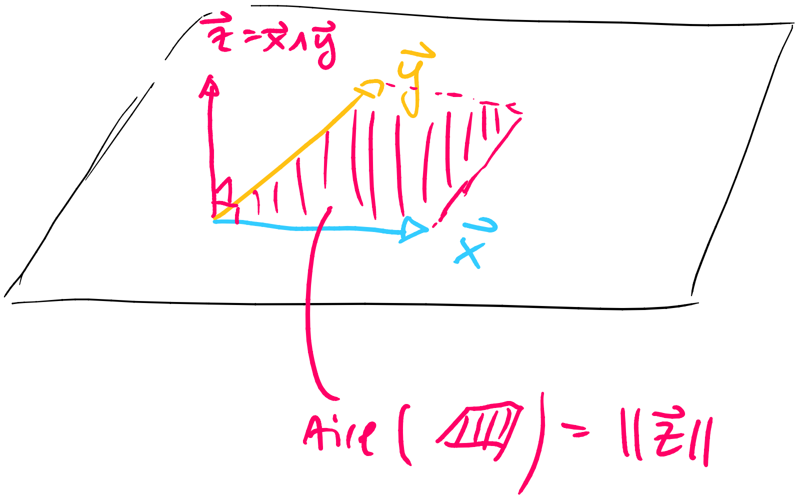
Cours du 29.03.2021

lundi, 29 mars 2021 18:45

Multiplication par un scalaire	Produit scalaire	Produit vectoriel
$\lambda \times \vec{x}$	$\vec{x} \cdot \vec{y}$	$\vec{x} \wedge \vec{y}$
$\times: \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$	$\cdot: \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}$	$\wedge: \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$
Un scalaire multiplie un vecteur, le résultat est un ***vecteur*** !	Un vecteur multiplié par un autre vecteur, le résultat est un ***scalaire*** !	Un vecteur multiplié par un autre vecteur, le résultat est un ***vecteur*** !

ATTENTION : le produit vectoriel n'a pas de sens dans $\mathbb{R}^2$!! Nous allons voir pourquoi !



Pour déterminer le SENS du vecteur z, il faut utiliser la règle "du tire-bouchon" (de la main droite, ...)

Que vaut $\vec{z}$?

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Exercice : Prouvons que $\vec{x} \wedge \vec{y} = -(\vec{y} \wedge \vec{x})$

$A = \cdots\cdots = \cdots\cdots \ \Delta$

$\quad \| $

$B = \cdots\cdots\cdots\cdots \ \Delta$

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{0}$

$$\vec{x} \wedge \vec{y} + \vec{y} \wedge \vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_1y_3 + x_3y_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2x_3 - y_3x_2 \\ -y_1x_3 + y_3x_1 \\ y_1x_2 - y_2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 + y_2x_3 - y_3x_2 \\ -x_1y_3 + x_3y_1 - y_1x_3 + y_3x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 + y_1x_2 - y_2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} \wedge \vec{y} = -(\vec{y} \wedge \vec{x})$$

CQFD!

Conséquence $\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{y} \wedge \vec{x}\|$

Rappel : $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \ \|\vec{x}\|$ Déjà prouvé !!!

$\lambda = -1$

$$\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|-\vec{y} \wedge \vec{x}\| = |-1| \ \|\vec{y} \wedge \vec{x}\| = \|\vec{y} \wedge \vec{x}\|$$

CQFD!

Exercice :

Que vaut

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot 2 \\ -2 \cdot 1/2 + 4(-1) \\ 2 \cdot 2 - 3(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

3D : Pour définir un plan

- 2 vecteurs et 1 point (vecteurs ne doivent pas être COLINEAIRES)

- 3 points qui ne sont pas colinéaires
- 1 point et une direction PERPENDICULAIRE au plan
  (NORMAL) "

En 3D, une droite est définie par
- 1 point et une direction
- 1 point et un vecteur normal NE SUFFISENT PAS !!!!
- 2 points suffisent !!

EN 3D une droite passant par un point A de direction $\vec{x}$

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \vec{x} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} p_1 = a_1 + \lambda x_1 \\ p_2 = a_2 + \lambda x_2 \\ p_3 = a_3 + \lambda x_3 \end{cases}}$$

Système d'équ. Paramétriques de la ...

$$\lambda + \lambda - \lambda = \lambda \qquad \begin{cases} \lambda = \frac{p_1 - a_1}{x_1} \\ \lambda = \frac{p_2 - a_2}{x_2} \\ \lambda = \frac{p_3 - a_3}{x_3} \end{cases}$$

CONSTANTE $\in \mathbb{R}$

3D $\quad \square p_1 + \triangle \cdot p_2 + \star p_3 + \hexagon = \lambda$

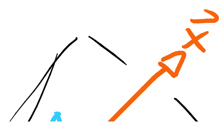
2D $\quad \square p_1 + \triangle p_2 + \star = 0$ (PLUS de paramètre !)

En 3D, l'équation cartésienne d'un PLAN

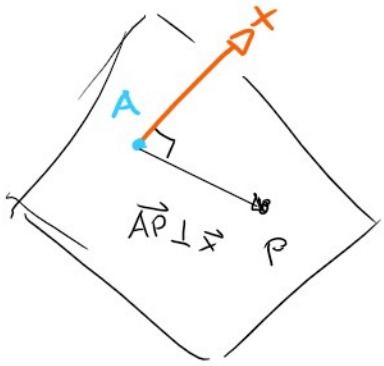
$$\boxed{\square p_1 + \triangle p_2 + \star p_3 + \hexagon = 0}$$

Comment trouver l'équation d'un plan ???

On a un vecteur $\vec{x}$ et un point A, on cherche le plan PERPENDICULAIRE à $\vec{x}$ qui contient A.



PERPENDICULAIRE à $\vec{x}$ qui contient A.



$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$$

$$\langle \vec{AP}, \vec{x} \rangle = 0 \qquad \cos(\theta) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ p_3 - a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 p_1 - a_1 x_1 + x_2 p_2 - a_2 x_2 + x_3 p_3 - a_3 x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 - (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = 0$$

$$\square p_1 + \triangle p_2 + \star p_3 + \hexagon = 0$$

Exercice : trouvez l'équation paramétrique du plan contenant les vecteurs

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Et contenant le point $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ -(1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{z}$$

$$z_1 p_1 + z_2 p_2 + z_3 p_3 - (a_1 z_1 + \underbrace{a_2 z_2}_{1 \cdot (-2)} + a_3 z_3)$$

$$\boxed{-2 p_2 + 4 p_3 + 2 = 0}$$

Vérifions si A est sur le plan

$$0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 = 0.$$

$$0 \cdot 0 - 2(5) + 4 \cdot 2 + 2 = -10 + 10 = 0 \,!$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$